نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۳/۱/۲۷**

وقت : **۷۵** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۱-فنی (۷ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۳- ۱۳۹۲**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ – الف) تمام مقادیر z را بیابید بطوریکه : $z^{۷}+۱=\frac{\sqrt{۳}}{i}$

ب) مقدار $z=(\frac{۱+i}{\sqrt{۲}})^{۴n}+(\frac{۱-i}{\sqrt{۲}})^{۴n}$ را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۲ – تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۵}}$ را در نظر بگیرید. یک به یک بودن تابع f را بررسی کنید و تابع وارون آن را (در صورت وجود) بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۳ - بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده هوپیتال ، حدهای زیر را محاسبه کنید : ۱۵ نمره

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۵\sqrt[۳]{x}-۶}{\sqrt[۳]{x}-۱} \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x-\sin ۲x}{۲x^{۳}}$$

سوال ۴ - الف) اگر $f(x)=\sqrt[۵]{۲-x}$ ، مقدار تقریبی $f(۱/۱۵)$ را بیابید.

ب) نقطه M واقع بر منحنی $x=y^{۲}-۴$ را چنان بیابید که مثلثی که به وسیله خط مماس در آن نقطه و محورهای مختصات ساخته می‌شود دارای کمترین مساحت باشد. ۱۵ نمره

سوال ۵ – نمودار تابع $y=\frac{۲x^{۲}+۸x+۷}{x^{۲}+۴x+۳}$ را رسم کنید. ۲۰ نمره

موفق باشید

جواب سوال۱ : الف) $z^{۷}+۱=\frac{\sqrt{۳}}{i}\to z^{۷}=-۱-\sqrt{۳}\,i=۲(\frac{-۱}{۲}+\frac{-\sqrt{۳}}{۲}i)=۲e^{\frac{-۲\pi}{۳}i}\to z_k=\sqrt[۷]{۲}\,e^{(\frac{-۲\pi}{۲۱}+\frac{۲k\pi}{۷})i}\ ,\ k=۰,۱,\cdots,۶$

ب) روش اول : $z=(\frac{۲i}{۲})^{۲n}+(\frac{-۲i}{۲})^{۲n}=(i)^{۲n}+(-i)^{۲n}=(-۱)^n+(-۱)^n=۲(-۱)^n$

روش دوم : $z=(\frac{۱+i}{\sqrt{۲}})^{۴n}+(\frac{۱-i}{\sqrt{۲}})^{۴n}=(e^{\frac{\pi}{۴}i})^{۴n}+(e^{\frac{-\pi}{۴}i})^{۴n}=(e^{\pi i})^n+(e^{-\pi i})^n=(-۱)^n+(-۱)^n=۲(-۱)^n$

جواب سوال۲ : برای اثبات یک به یک بودن تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۵}}$

روش اول) فرض می کنیم $f(a)=f(b)$ بنابر این $\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+۵}}=\frac{b}{\sqrt{b^{۲}+۵}}$ یعنی $\frac{a^{۲}}{a^{۲}+۵}=\frac{b^{۲}}{b^{۲}+۵}$

و در نتیجه $۵a^{۲}=۵b^{۲}$. اکنون داریم $a=b$ و یا $a=-b$. اگر $a=-b$ آنگاه $f(b)=f(a)=f(-b)=-f(b)$ که نتیجه می‌دهد $f(b)=۰$ بنابر این $a=b=۰$. یعنی همواره داریم $a=b$ یعنی تابع f یک به یک است.

روش دوم : چون داریم $f'(x)=\frac{۵}{\sqrt{(x^{۲}+۵)^{۳}}}$ و مشتق همواره مثبت است پس تابع f صعودی اکید و در نتیجه یک به یک خواهد بود.

برای پیدا کردن وارون تابع f: $y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۵}}\to y^{۲}=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۵}\to\frac{y^{۲}}{۱-y^{۲}}=\frac{x^{۲}}{۵}\to x^{۲}=\frac{۵y^{۲}}{۱-y^{۲}}\to x=\pm\frac{\sqrt{۵}y}{\sqrt{۱-y^{۲}}}$

چون داشتیم $xy=\sqrt{x^{۲}+۵}$ پس x و y هم علامت هستند و در نتیجه $x=+\frac{\sqrt{۵}y}{\sqrt{۱-y^{۲}}}$. تابع وارون f برابر است با :

$$f^{-۱}(x)=\frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\ \ ;\ x\in(-۱,۱)$$

جواب سوال۳ :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x-\sin ۲x}{۲x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x/\cos ۲x-\sin ۲x}{۲x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x(۱-\cos ۲x)}{۲x^{۳}\cos ۲x}$$

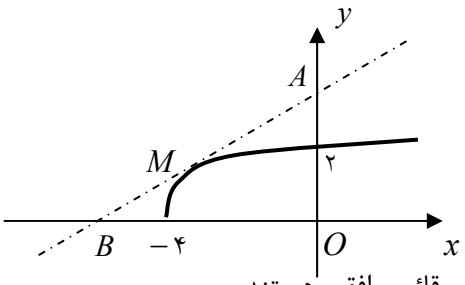
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x\times ۲\sin^{۲}x}{۲x^{۳}\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}\times(\frac{\sin x}{x})^{۲}\times\frac{۱}{\cos ۲x}=۲\times۱\times۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۵\sqrt[۳]{x}-۶}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}+۶)}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}(\sqrt[۳]{x}+۶)=۷$$

جواب سوال۴ : الف) می دانیم : $f(۱/۱۵)\cong f(۱)+f'(۱)(۱/۱۵-۱)$

$$f(x)=\sqrt[۵]{۲-x}\to f'(x)=\frac{-۱}{۵\sqrt[۵]{(۲-x)^{۴}}}\to f(۱)=۱\ ,\ f'(۱)=\frac{-۱}{۵}\to f(۱/۱۵)\cong ۱+\frac{-۱}{۵}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۹۷$$

ب) چون $y=\pm\sqrt{x+۴}$ و نمودار آن نسبت به محور xها متقارن است نیمه بالایی آن را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم : $y=\sqrt{x+۴}$ اگر $M=(a,\sqrt{a+۴})$ نقطه مورد نظر باشد شیب خط مماس در نقطه M برابر است با $m=\frac{۱}{۲\sqrt{a+۴}}$



و معادله خط مماس عبارت است از : $y-\sqrt{a+۴}=\frac{۱}{۲\sqrt{a+۴}}(x-a)$

نقاط $A=(۰,\frac{a+۸}{۲\sqrt{a+۴}})$ و $B=(-a-۸,۰)$ نقاط برخورد خط مماس با محورهای قائم و افقی هستند.

مساحت مثلث OAB برابر است با $S(a)=\frac{(a+۸)^۲}{۴\sqrt{a+۴}}$ برای پیدا کردن مقدار مینیمم آن می نویسیم :

$$S'(a)=\frac{۲(a+۸)}{۴\sqrt{a+۴}}-\frac{(a+۸)^۲}{۸\sqrt{(a+۴)^۳}}=\frac{a+۸}{۸\sqrt{(a+۴)^۳}}(۳a+۸)$$

جواب سوال۵ : $f(x)=\frac{۲x^۲+۸x+۷}{x^۲+۴x+۳}$

ابتدا دامنه تابع را مشخص می‌کنیم. $x^۲+۴x+۳=۰\rightarrow x=-۱,-۳\rightarrow D_f=R-\{-۱,-۳\}$

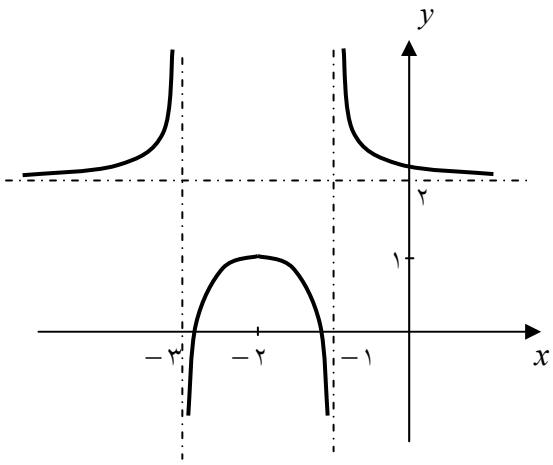
نمودار تابع دارای دو مجانب قائم $x=-۱$ و $x=-۳$ و یک مجانب افقی $y=۲$ است زیرا :

$$\left|\begin{matrix}x\rightarrow -۱\\ y\rightarrow \pm\infty\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}x\rightarrow -۳\\ y\rightarrow \pm\infty\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}x\rightarrow \pm\infty\\ y\rightarrow ۲\end{matrix}\right.$$

مشتق و ریشه های آن را محاسبه می‌کنیم. $f'(x)=\frac{-۲(x+۲)}{(x^۲+۴x+۳)^۲}\rightarrow f'(x)=۰\rightarrow \left|\begin{matrix}x=-۲\\ y=۱\end{matrix}\right.$

جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		∞
y'		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
y	۲	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	۱	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	۲



سیدرضا موسوی